DE LA CONTROVERSE ENTRE *Mrs. LEIBNITZ & BERNOULLI* SUR LES LOGARITHMES DES NOMBRES NEGATIFS ET IMAGINAIRES.

PAR M. EULER.

Quoique la doctrine des logarithmes ſoit ſi ſolidement établie, que les vérités, qu'elle renferme, ſemblent auſſi rigoureuſement demontrées que celles de la Geometrie; les Mathematiciens ſont pourtant encore fort partagés ſur la nature des logarithmes des nombres négatifs & imaginaires: & quand on ne trouve pas cette controverſe fort agitée, la raiſon en eſt apparemment, qu'on n'a pas voulu rendre ſuſpecte la certitude de tout ce, qu'on avance dans les parties pures de la Mathematique, en developant devant les yeux de tout le monde les difficultés, & meme les contradictions, auxquelles les ſentimens des Mathematiciens ſur les logarithmes des nombres négatifs & imaginaires ſont aſſujettis. Car, bien que leurs ſentimens puiſſent être fort differens ſur des queſtions, qui regardent la Mathematique appliquée, où les diverſes manieres d'enviſager les objets & de les ramener à des idées preciſes, peuvent donner lieu à des controverſes réélles; on a toujours prétendu, que les parties pures de la Mathematique étoient entierement délivrées de tout ſujet de diſpute, & qu'il ne

s'y trouvoit rien, dont on ne fut en état de démontrer, ou la vérité ou la fauſſeté.

Comme la doctrine des logarithmes appartient ſans contredit à la Mathematique pure, on ſera bien ſurpris d'apprendre, qu'elle ait été jusqu'ici aſſujettie à des controverſes tellement embarraſſées, que de quelque parti qu'on ſe déclare, on tombe toujours en des contradictions, qu'il ſemble tout à fait impoſſible de lever. Cependant ſi la vérité doit ſe ſoutenir partout, il n'y a aucun doute, que toutes ces contradictions, quelque ouvertes qu'elles paroiſſent, ne peuvent etre qu'apparentes, & qu'il n' y ſauroit manquer des moyens pour ſauver la verité, quoique nous ne ſachions point, de quel endroit nous puiſſions tirer ces moyens.

Cette controverſe ſur les logarithmes des nombres négatifs & imaginaires ſe trouve agitée avec aſſez de force dans le Commerce litteraire entre M. Leibnitz & M. Jean Bernoulli. Ces deux grands Mathematiciens, à qui nous ſommes pour la pluſpart redevables de l'Analyſe des infinis, furent tellement partagés ſur cet article, qu'il n'y avoit pas moyen de les mettre d'accord là deſſus ; quoique l'un & l'autre n'ait eu en vuë que la vérité, & qu'ils fuſſent egalement eloignés de ſoutenir leurs ſentimens avec opiniatreté. Mais chacun a trouvé dans le ſentiment de l'autre tant de contradictions, que ç'auroit été une complaiſance trop outrée, ſi l'un avoit changé ſon ſentiment en faveur de l'autre. Car il faut remarquer que les contradictions, que ces deux Grands hommes ſe reprochoient, etoient réelles, & point du tout du nombre de celles, qui ne paroiſſent telles, qu'à la partie oppoſée, entêtée de ſon propre ſentiment.

Pour mettre donc cette remarquable controverſe dans tout ſon jour, j'expoſerai ici ſéparément les ſentimens de M. Bernoulli & de M. Leibniz ; j'y ajouterai enſuite tous les argumens, dont chacun s'eſt ſervi pour maintenir ſon ſentiment : & enfin je détaillerai les objections, qu'on peut faire, tant contre les argumens, que contre chaque ſentiment meme, & je ferai ſentir en toutes leurs forces toutes les contradictions,

aux-

auxquelles l'un & l'autre de ces deux ſentimens eſt aſſujetti, afin qu'on ſoit d'autant mieux en état de juger, combien il doit être difficile de découvrir la verité, & de la garantir contre toutes les objections, aprés que les deux plus grands hommes y ont travaillé en vain.

Sentiment de Mr. Bernoulli.

Mr. Bernoulli ſoutint, que les logarithmes des nombres négatifs étoient les memes que ceux des nombres affirmatifs: ou que le logarithme du nombre negatif $-a$ *étoit égal au logarithme du nombre affirmatif* $+a$. *Ainſi le ſentiment de M. Bernoulli porte qu'il y a* $l-a = l+a$.

M. Leibniz a donné occaſion à cette declaration de M. Bernoulli, lorsqu'il avança dans la CXC Epitre du Commerce, que la raiſon de $+1$ à -1 ou de -1 à $+1$ étoit imaginaire, puisque le logarithme ou la meſure de cette raiſon, c. à d. le logarithme de -1, qui eſt l'expoſant de cette raiſon, étoit imaginaire. Là deſſus M. Bernoulli declara dans la CXCIII Epitre qu'il n'etoit point de meme avis, & qu'il croyoit même, que les logarithmes des nombres negatifs étoient non ſeulement réels, mais auſſi égaux aux logarithmes des mêmes nombres pris poſitivement. Mr. Bernoulli fortifia auſſi ſon ſentiment par les raiſons ſuivantes.

1. *Raiſon.* Pour prouver que $l-x = l+x$, quelque nombre qu'on marque par x, il recourt aux differentiels; & puisque le differentiel de $l-x$ eſt $\frac{-dx}{-x}$ ou $\frac{dx}{x}$ de même que celui de $l+x$, il en conclut, que ces quantités mêmes $l-x$ & $l+x$, dont les differentiels ſont égaux, doivent être égales entr'elles, & partant qu'il eſt $l-x = l+x$.

2. *Raiſon.* Cette raiſon eſt tirée de la nature de la courbe logarithmique. Pour la faire mieux comprendre, ſoit VBM une logarithmique décrite ſur l'axe OAP, qui eſt en même tems ſon aſymtote. Soit la ſoutangente de cette logarithmique, qui eſt, comme on ſait, conſtante PLANCHE I. *Fig. I.*

ſtante, $= 1$; & que l'appliquée fixe A B ſoit auſſi $= 1$. Cela poſé, ſi l'on nomme une abſciſſe quelconque A P $= x$, priſe depuis le point fixe A, & l'appliquée qui y repond P M $= y$, on ſait que x exprime le logarithme de y, ou que $x = /y$. Donc prenant les differentiels, on aura pour cette courbe logarithmique cette équation differentielle $dx = \frac{dy}{y}$ ou $y\,dx = dy$. Cette équation demeurant la même, quoiqu'on mette $-y$ au lieu de y, M. Bernoulli conclut de là, que cette courbe V B M eſt accompagnée, en vertu de la loi de continuité, de la branche $v\,b\,m$, qui lui eſt égale & ſemblable, étant ſituée de l'autre part de l'axe O P, de ſorte que cet axe ſoit en même tems un diametre de la courbe entiere. Et partant, puisque la même abſciſſe A P répond également aux deux appliquées P M & P m, dont l'une eſt la negative de l'autre, de ſorte que poſant P M $= y$ il eſt P $m = -y$; il s'enſuit que x eſt auſſi bien le logarithme de $-y$ que de $+y$, par conſéquent $/-y = /+y$.

3. *Raiſon.* Comme tout revient à prouver que la logarithmique eſt compoſée de deux branches égales, ſituées de part & d'autre de l'aſymtote O P, M. Bernoulli apporte encore une autre raiſon, qui eſt, qu'en conſidérant les courbes compriſes dans cette équation plus générale $dx = \frac{dy}{y^n}$, on eſt d'accord, que toutes ces courbes, lorsque l'expoſant n eſt un nombre impair, ont deux branches telles, que l'axe, ſur lequel ſont priſes les abſciſſes x, en eſt un diametre. Donc il faut que cette propriété ait auſſi lieu, ſi $n = 1$; or dans ce cas on aura la logarithmique de l'article précedent; d'où il s'enſuit donc, que tant le logarithme de P M $= +y$, que le logarithme de P $m = -y$ eſt le même $=$ A P $= x$.

4. *Raiſon.* Puisqu'il eſt certain par la nature des logarithmes, que le logarithme d'une puiſſance quelconque p^n eſt égal au logarithme de la racine p multipliée par l'expoſant n, ou que $/p^n = n/p$; il s'enſuit

ſuit, que prenant pour p un nombre négatif $-a$, il y aura $l(-a)^n = nl(-a)$. Soit $n = 2$, & il ſera $l(-a)^2 = 2l(-a)$. Or parce que $(-a)^2 = a^2$, nous aurons $l(-a)^2 = la^2 = 2la$; d'où il s'enſuit que $2l(-a) = 2la$, & partant $l-a = l+a$. Cela ſe montre plus promtement de cette maniere: Puisque $(-a)^2 = (+a)^2$, il ſera $l(-a)^2 = l(+a)^2$, ou bien $2l-a = 2l+a$, & par conſéquent $l-a = l+a$.

Toutes les autres raiſons, qu'on peut alleguer pour prouver ce ſentiment, ſe réduiſent aiſement à une des quatre, que je viens d'expoſer. Je m'en vai donc étaler les objections, qu'on fait contre ce ſentiment, & les raiſons dont il eſt appuyé.

1. *Objection.* M. Leibniz oppoſa contre la premiere raiſon; que la regle de differentier le logarithme d'une quantité variable x, en diviſant le differentiel de x par la quantité même x n'avoit lieu, que lorsque x marquoit une quantité poſitive, de ſorte qu'on ſe trompoit en poſant le differentiel de $l-x$ egal à $\frac{-dx}{-x}$ ou à $\frac{dx}{x}$. Or il faut avoüer, que cette objection eſt non ſeulement extrêmement foible, n'etant ſoutenue par aucune raiſon valable; mais qu'elle renverſeroit tout à fait le calcul differentiel des logarithmes. Car comme ce calcul roule ſur des quantites variables $c.à.d$ ſur des quantités conſidérées en général, s'il n'etoit pas vrai généralement, qu'il fut $d.lx = \frac{dx}{x}$, quelque quantité qu'on donne à x, ſoit poſitive, ou négative, ou même imaginaire, on ne pourroit jamais ſe ſervir de cette régle: la vérité du calcul differentiel étant fondée ſur la généralité des regles, qu'il renferme. Or M. Leibniz n'auroit pas eu beſoin de ſe tenir à cette objection pour maintenir ſon ſentiment, puiſqu'il auroit pu attaquer la raiſon de M. Bernoulli par une objection beaucoup plus forte, que voilà.

2. *Objection.* Mr. Bernoulli voulant prouver par l'egalité des differentiels, qu'il etoit $l-x = l+x$, prouveroit par le même raiſonnement

nement que $l2x = lx$; car le differentiel de $l2x$ eſt $\frac{2dx}{2x} = \frac{dx}{x}$, tout comme celui de lx. Et partant ſi le raiſonnement de M. Bernoulli étoit juſte, il s'enſuivroit que non ſeulement $l-x = l+x$, mais auſſi que $l2x = lx$ & en général que $lnx = lx$, quelque nombre que marque n: conſéquence, que M. Bernoulli lui même n'accorderoit jamais. Or on ſait que, lorsque les differentiels de deux quantités variables ſont égaux, il n'en ſuit pas davantage, que ce, que ces quantités variables different entr'elles d'une quantité conſtante; & on n'en ſauroit conclure, qu'elles fuſſent égales. Ainſi quoique le differentiel de $x+a$ ſoit $= dx$ auſſi bien que celui de x, la conſéquence ſeroit bien fauſſe, ſi l'on en vouloit conclure que $x+a = x$. Par cette raiſon il eſt donc clair, que puisque le differentiel de $l-x$ & de $l+x$ eſt le même $\frac{dx}{x}$, les quantités $l-x$ & $l+x$ ne different entr'elles que d'une quantité conſtante, ce qui eſt egalement évident, vuque $l-x = l-1+lx$. Et de là on comprend auſſi aiſément, que puisque $lnx = lx+ln$, le differentiel de lnx doit être égal au differentiel de lx. Il eſt vrai que M. Bernoulli ſuppoſe $l-1 = 0$, de même qu'il eſt $l1 = 0$, de ſorte qu'il ſeroit $l-x = lx+l-1 = lx$. Mais comme c'eſt préciſément ce que M. Bernoulli veut prouver par ce raiſonnement, on voit bien que cette ſuppoſition ne peut pas être admiſe.

3. *Objection.* On peut oppoſer la même choſe contre la ſeconde raiſon de M. Bernoulli, quand il veut prouver par l'equation differentielle de la Logarithmique $ydx = dy$, que cette courbe a deux branches ſemblables ſituées de part & d'autre de l'axe. Car non ſeulement cette équation demeure la même, ſi l'on met $-y$ au lieu de y, mais auſſi ſi l'on met $2y$, ou en général ny pour y; d'où il ſuivroit que cette courbe eut une infinité de branches, & que l'abſciſſe x fut le logarithme commun non ſeulement de y & de $-y$, mais auſſi de $2y$, & en général de ny, quelque nombre que ſoit n. Ainſi par la même raiſon, qu'on eſt en droit de nier l'infinité des branches de la Logarithmique, on niera auſſi l'exiſtence des deux branches, que M. Bernoulli veut établir.

4. *Ob-*

4. *Objection.* Cette objection eſt encore dirigée contre les deux branches de la courbe logarithmique. Car quoique qu'on puiſſe ſurement conclure l'exiſtence d'un diametre d'une courbe, lorsque ſon équation entre les coordonnées x & y eſt telle, qu'elle demeure inalterée, ſi l'on met $-y$ à la place de y. Cependant ce critere n'eſt juſte, que lorsque l'équation pour la courbe eſt algébrique, ou renfermée en termes finis. Car on ſait qu'une équation differentielle eſt beaucoup plus générale, que l'équation finie d'où elle a été tirée, & qu'elle renferme une infinité de courbes, qui ne ſont pas compriſes dans l'equation finie. Ainſi l'équation de la parabole $yy = ax$ a pour differentielle $2y\,dy = a\,dx$; mais cette même équation differentielle convient également à cette équation générale $yy = ax \pm ab$, qui renferme à la fois une infinité de paraboles. Il en eſt de meme de l'equation differentielle de la logarithmique $y\,dx = dy$, qui convient auſſi bien à cette équation finie $x = ly$, qu'a celle-cy $x = ly$, qu'on a pourtant uniquement en vuë. De la il s'enſuit qu'on ne peut pas juger de la forme d'une courbe, en ne conſiderant que ſon équation differentielle.

5. *Objection.* Celle-cy regarde la troiſieme raiſon, qui eſt ſans doute beaucoup plus forte. Car ſi toutes les courbes compriſes dans cette équation generale $dx = \frac{dy}{y^n}$, où n marque un nombre impair, ſont douées d'un diametre, la même propriété doit avoir lieu, ſi $n = 1$, ce qui eſt le cas de la logarithmique. Mais puisque cette propriété n'eſt evidente, qu'entant qu'on conſidere les équations integrales de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$, qu'on peut toujours aſſigner algébriquement hormis le cas $n = 1$; de meme maniere qu'on doit excepter ce cas, lorsque la queſtion roule ſur l'intégrabilité de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$, on ſera en droit de faire la même exception, lorsqu'il s'agit du jugement d'un diametre. Donc, ſi l'on ne peut pas prouver par quelque

autre raiſon, que la logarithmique ait un diametre, cet argument tiré de l'équation générale $dy = \frac{dy}{y^n}$ n'eſt pas convaincant. Pour en montrer plus clairement l'inſuffiſance, je ferai voir même dans les courbes algébriques des cas, où une équation générale renferme des courbes toutes douées d'un diametre, & que néantmoins il en faut excepter un cas particulier. Qu'on conſidere cette équation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$, & on ne doutera pas de conclure, que les courbes exprimées par cette équation n'ayent un diametre, puiſqu'en réduiſant l'equation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$ à la rationalité, on obtient une équation du huitieme degré, où tous les expoſans de y ſont des nombres pairs. Cependant quelque ſure que paroiſſe cette concluſion, il en faut pourtant excepter le cas où $b = o$; car alors l'équation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3x}$ étant delivrée des ſignes radicaux ne monte qu'au quatrieme degré devenant:

$$y^4 - 2axyy - 4aaxy + aaxx - a^3x = o$$

laquelle à cauſe du terme $4aaxy$ eſt deſtituée de diametre. De tout cela il s'enſuit donc, que cet argument de M. Bernoulli n'eſt pas aſſez rigoureux pour demontrer ſon ſentiment.

6. *Objection.* Je paſſe à la quatrieme raiſon de M. Bernoulli, qui eſt ſans doute la plus forte; car on ne ſauroit revoquer en doute aucun article, qui y ſert de fondement, ſans renverſer les principes les mieux établis de l'analyſe & de la doctrine des logarithmes. Car on ne ſauroit nier que $(-a)^2 = (+a)^2$, donc il n'y a aucun doute, que leurs logarithmes ne ſoient égaux c. à d. $l(-a)^2 = l(+a)^2$. Enſuite il eſt également certain qu'il eſt en général $lp^2 = 2lp$, donc il y a $l(-a)^2 = 2l-a$ & $l(+a)^2 = 2l+a$: & partant il ſera ſans contredit $2l-a = 2l+a$. Les moitiés de ces deux quantités ſeront donc auſſi inconteſtablement égales entr'elles, & par conſéquent il ſera $l-a = la$, tout comme M. Bernoulli le ſoutient. Mais ſi ce raiſon-

raiſonnement eſt juſte, on en tirera auſſi d'autres conſéquences, que perſonne, & encore moins M. Bernoulli, ne ſauroit accorder : car on prouvera de la même façon, que les logarithmes des quantités imaginaires ſeroient auſſi bien réels, que ceux des nombres negatifs. Car il eſt certain que $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$, donc il ſera auſſi $l(a\sqrt{-1})^4 = la^4$, & de plus $4l(a\sqrt{-1}) = 4la$, par conſéquent $l(a\sqrt{-1}) = la$. Outre cela, puiſqu'il eſt $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = a^3$, il ſera $l\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = la^3$, & partant $3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = 3la$, donc $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = la$, ce qu'on ne ſauroit admettre ſans renverſer toute la doctrine des logarithmes.

Il ſeroit donc, ſelon le ſyſteme de M. Bernoulli, non ſeulement $l-1 = l1 = 0$, mais auſſi $l\sqrt{-1} = 0$; $l-\sqrt{-1} = 0$; & $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = 0$. Or M. Bernoulli ayant ſi heureuſement réduit la quadrature du cercle aux logarithmes des nombres imaginaires, & le logarithme de $\sqrt{-1}$ etoit $= 0$, toute cette belle découverte ſeroit fauſſe; par laquelle il a fait voir, que le rayon eſt à la quatrieme partie de la circonference, comme $\sqrt{-1}$ à $l\sqrt{-1}$. Donc poſant le rapport du diametre à la circonference $= 1 : \pi$, il ſera $\frac{1}{2}\pi = \frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$, & partant $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui ſeroit abſurde s'il etoit $l\sqrt{-1} = 0$. Il n'eſt pas donc vray que $l\sqrt{-1} = 0$, d'où il faut conclure que quelque ſolide que paroiſſe la 4me raiſon, elle doit être ſujette à caution, puiſqu'il en ſuivroit auſſi bien $l\sqrt{-1} = 0$ que $l-1 = 0$. Par conſéquent on ne peut pas dire, que le ſentiment de M. Bernoulli ſoit ſuffiſament prouvé.

Il eſt ici fort étonnant, que, ſoit qu'on embraſſe le ſentiment de M. Bernoulli, ou qu'on le rejette, on tombe également en des embar-

ras inſurmontables, & même en des contradictions. Car ſi l'on ſoutient que $l - a = l + a$ ou $l - 1 = l + 1 = 0$, on eſt obligé d'avouër qu'il eſt auſſi $l\sqrt{-1} = 0$, puisque $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2} l - 1$. Or il ſeroit non ſeulement abſurde de ſoutenir, que les logarithmes des quantités imaginaires ne ſoient pas imaginaires, mais il ſeroit auſſi faux que $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui eſt néantmoins rigoureuſement prouvé. Ainſi en ſe declarant pour le ſentiment de M. Bernoulli, on tombe en contradiction avec des verités très ſolidement établies.

Poſons que le ſentiment de M. Bernoulli ſoit faux, & qu'il n'y ait point $l - 1 = 0$; car c'eſt à quoi ſe réduit le ſentiment de M. Bernoulli; & on ſera obligé d'accuſer de fauſſeté quelcune des opérations ſur leſquelles le raiſonnement de la 4me raiſon eſt fondé : ce qu'on ne pourra faire non plus ſans tomber en contradiction avec d'autres vérités demontrées. Pour rendre cela plus évident, ſoit $l - 1 = \omega$, & s'il n'eſt pas $\omega = 0$, ſon double 2ω ne ſera non plus $= 0$, or 2ω eſt le logarithme du quarré de -1, lequel étant $= +1$, le logarithme de $+1$ ne ſeroit plus $= 0$, ce qui eſt une nouvelle contradiction. De plus $-x$ eſt auſſi bien $= -1.x$ que $= \frac{x}{-1}$, donc $l - x = lx + l - 1 = lx - l - 1$: il ſeroit donc $l - 1 = -l - 1$, ſans qu'il fut $l - 1 = 0$; or c'eſt une contradiction de dire qu'il ſoit $+a = -a$ ſans qu'il ſoit $a = 0$.

Soit donc qu'on diſe l'une ou l'autre de ces deux choſes, ou que le ſentiment de M. Bernoulli eſt vrai, ou qu'il eſt faux, on ſe plonge également dans le plus grand embarras, ayant à combattre avec des contradictions ouvertes. Cependant il faut abſolument, ou que ce ſentiment ſoit vrai, ou qu'il ſoit faux, & il ne paroit point d'autre parti à prendre. Quel moyen donc de ſe tirer d'affaire & de ſauver la vérité contre de ſi grandes contradictions? Je paſſe à l'examen du ſentiment de M. Leibniz.

Senti-

Sentiment de M. Leibniz.

M. Leibniz ſoutint que les logarithmes de tous les nombres negatifs, & à plus forte raiſon ceux des nombres imaginaires, etoient imaginaires: ou puiſque $l-a = la + l-1$, *il ſoutint que* $l-1$ *etoit une quantité imaginaire.*

J'ai déjà remarqué que M. Leibniz ſoutenoit, que la raiſon de $+1$ à -1 ou de -1 à $+1$ étoit imaginaire, puiſque le logarithme de cette raiſon ou $l-1$ étoit imaginaire. On voit bien que toutes les objections faites contre le ſyſteme de M. Bernoulli ſervent à fortifier ce ſentiment, & que les raiſons alleguées pour le ſentiment de M. Bernoulli doivent être contraires à celui de M. Leibniz. Cependant on peut apporter des raiſons particulieres pour confirmer le ſentiment de M. Leibniz, qui feront le ſujet de mon examen, qui ſuit:

1. *Raiſon.* Ayant fait voir que le logarithme du nombre $1+x$ eſt égal à la ſomme de cette ſerie:

$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \&c.$$

d'où l'on voit dabord que ſi $x = 1$, il doit être $l1 = o$. Maintenant pour avoir le logarithme de -1, il faut mettre $x = -2$, d'où l'on obtient.

$$l-1 = -2 - \tfrac{1}{2}.4 - \tfrac{1}{3}.8 - \tfrac{1}{4}.16 - \tfrac{1}{5}.32 - \tfrac{1}{6}.64 - \&c.$$

Or il n'y a aucun doute, que la ſomme de cette ſerie divergente ne ſauroit être $= o$; donc il eſt certain que $l-1$ n'eſt pas $= o$. Le log. de -1 ſera donc imaginaire, puiſqu'il eſt d'ailleurs clair, qu'il ne ſauroit être réel, c. à d. ou poſitif, ou negatif.

2. *Raiſon.* Soit $y = lx$, & poſant e pour le nombre dont le logarithme $= 1$, dont la valeur approchée eſt, comme on ſait, $e = 2,718281828459$; puiſqu'il ſera $y/e = 1/x$, on en tirera $x = e^y$. Ainſi le logarithme du nombre x étant l'expoſant d'une puiſſance de e qui eſt égale au nombre x, il eſt clair, qu'aucun expoſant réél d'une puiſſance de e ne ſauroit produire un nombre negatif: &

partant pour que e^y devienne $= -1$, ni $y = 0$, ni aucun nombre réel mis pour y ſauroit remplir cette condition. Et poſant en général pour x un nombre negatif $-a$, dont on ſuppoſe le logarithme $= y$, l'équation $e^y = -a$ ſera toujours impoſſible, ou la valeur de y imaginaire.

3. *Raiſon.* Puiſqu'en général la valeur de e^y s'exprime par cette ſerie infinie :

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

qui eſt toujours convergente, quelque grand nombre qu'on mette pour y, de ſorte que les objections tirées de la nature des ſuites divergentes, comme dans la premiere raiſon, ne trouvent pas lieu ici. Ainſi le logarithme du nombre x étant poſé $= y$, on aura

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

& partant ſi y marque le logarithme de -1, ou qu'il ſoit $x = -1$, on aura cette égalité

$$-1 = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

à laquelle, comme il eſt d'abord clair, ne ſauroit ſatisfaire la valeur $y = 0$, vu qu'il en réſulteroit $-1 = +1$. Par conſéquent il eſt certain que le logarithme de -1 n'eſt pas $= 0$.

Je me contente d'avoir apporté ces trois raiſons, puiſque les autres argumens, par leſquels on peut confirmer le ſentiment de Mr. Leibniz, ſont déjà contenus dans les objections faites contre le ſyſteme de Mr. Bernoulli. Cependant ces trois raiſons que je viens d'expoſer, ſont ſujettes aux objections ſuivantes.

1. *Objection.* Contre la premiere raiſon on dira d'abord, que l'accroiſſe-

l'accroiſſement continuel des termes, qui ſont tous negatifs, de cette ſuite :

$$-2-\tfrac{1}{2}.\ 4-\tfrac{1}{3}.\ 8-\tfrac{1}{4}.\ 16-\tfrac{1}{5}.\ 32-\tfrac{1}{6}.\ 64-\text{\&c.}$$

n'eſt pas une marque ſeure que la ſomme de cette ſuite ne ſauroit être $=o$. Car ſi cette ſerie geometrique

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-\text{\&c.}$$

donne pour le cas $x=-2$, celle-cy

$$-1=1+2+4+8+16+32+64+\text{\&c.}$$

& pour le cas $x=-3$ celle-cy.

$$-\tfrac{1}{2}=1+3+9+27+81+243+\text{\&c.}$$

pourquoi, dira-t-on, ne ſeroit il pas poſſible, que la ſomme d'une ſerie, dont les termes croiſſent ayant par tout le meme ſigne, ne fut $=o$. Pour en donner un exemple, on n'a qu'à ajouter à la derniere ſerie termes pour termes, celle-cy :

$$\tfrac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+1-1+\text{\&c.}$$

& on aura effectivement :

$$o=2+2+10+26+82+242+730+\text{\&c.}$$

Donc ſi la ſomme de cette ſerie, eſt $=o$, quelle abſurdité ſeroit il donc de ſoutenir, qu'il fut auſſi

$$o=-2-\tfrac{1}{2}.\ 4-\tfrac{1}{3}.\ 8-\tfrac{1}{4}.\ 16-\tfrac{1}{5}.\ 32-\tfrac{1}{6}.\ 64-\text{\&c.}$$

& partant la premiere raiſon n'eſt pas convainquante.

2. *Objection.* La ſeconde raiſon eſt telle, qu'on pourroit auſſi s'en ſervir pour prouver le ſentiment oppoſé. Car puisqu'il y a $x=ey$ ſuppoſant y le logarithme du nombre x, toutes les fois que y eſt une fraction ayant pour dénominateur un nombre pair, il faut avouer qu'alors la valeur de ey & partant auſſi de x, eſt auſſi bien negative qu'affirmative. Ainſi ſi $\frac{m}{2n}$, eſt un logarithme, le nombre x qui lui répond

étant

étant $e^{m:2n} = \sqrt{e^{m:n}}$, ſera tant affirmatif que negatif; de ſorte que dans ce cas tant x que $-x$ aura le méme logarithme $\frac{m}{2n}$. Donc, puiſque les logarithmes ne ſont pas des nombres rationels, & par conſéquent équivalens à des fractions, dont les numérateurs & dénominateurs ſont infiniment grands, on pourra toujours regarder les dénominateurs comme des nombres pairs; il s'enſuit que le meme logarithme, qui convient au nombre poſitif $+x$, conviendra auſſi au nombre negatif $-x$.

3. *Objection.* La troiſieme raiſon eſt ſans doute la plus forte, puiſqu'elle ſemble exclure abſolument les nombres negatifs du nombre de ceux, à qui répondent des logarithmes réels. Car il eſt clair que quelque nombre réel qu'on mette pour y, la valeur de cette ſerie

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \text{&c.}$$

ne ſauroit jamais devenir negative, de ſorte qu'aucun logarithme réel ne ſauroit repondre à un nombre negatif. Cependant cette ſerie n'etant vraïe, qu'entant qu'elle decoule de la formule finie e^y, les objections précedentes ont ici également lieu. Car ſi e^y peut donner un nombre negatif, il importe fort peu, ſi la ſerie qui lui eſt égale en donne auſſi un ou non? Pour reconnoitre cela, on n'a qu'à conſiderer une formule radicale, comme $\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$, qui eſt auſſi bien $\frac{+1}{\sqrt{(1-x)}}$ que $\frac{-1}{\sqrt{(1-x)}}$, quoique la ſerie égale

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \text{&c.}$$

ne donne que ſa valeur affirmative, quelque nombre qu'on mette pour x.

M. Leibniz ne manqueroit pas de répondre à ces objections; & comme la premiere ne prouve pas le contraire de ſon ſentiment, & qu'elle

qu'elle ne rend que douteuſe la premiere raiſon, il ne perdroit rien de renoncer à cette premiere raiſon, & de s'en tenir principalement aux autres. Car au fond la ſeconde objection ne détruit point ſon ſentiment, qui ſe réduit uniquement à prouver que $\sqrt{-1}$ n'eſt pas $= 0$: or la ſeconde objection ne porte aucune atteinte à cela, vu que ſi e^y doit être $= -1$, l'expoſant y ne ſauroit être aucune fraction de la forme $\frac{m}{2n}$, pour que le ſigne radical puiſſe fournir une valeur negative. Car on conviendra aiſément, que ſoit qu'on mette pour y un nombre affirmatif plus grand que zero, ou un nombre negatif quelconque pour y, la valeur de la puiſſance e^y ne devient jamais $= -1$. Donc ſi y n'eſt pas imaginaire, il faudroit qu'il fut $e^y = -1$ dans le cas $y = 0$. Mais dans ce cas évanouït toute ambiguité de ſignes, qui pourroit avoir lieu à cauſe des ſignes radicaux, & il eſt indubitablement $e^0 = +1$. Et ſi l'on vouloit dire, qu'on put regarder 0 comme $\frac{0}{2}$, & e^0 comme $\sqrt{e^0} = \sqrt{1}$, dont la valeur ſeroit auſſi $= -1$; ce ſeroit une exception fort foible, puisque par la même raiſon on prouveroit que $-a = +a$: car poſant $a = a^{\frac{2}{2}} = \sqrt{a^2}$, on en tireroit auſſi bien $a = -a$ que $a = +a$. Pour prévenir ces ſortes de conſéquences fauſſes on n'a qu'à remarquer, qu'une telle expreſſion $a^{\frac{m}{2n}}$ n'a deux valeurs, l'une affirmative & l'autre negative, que lorsque la fraction $\frac{m}{2n}$ eſt réduite à ſes plus petits termes, & que le dénominateur demeure encore un nombre pair. Ainſi comme la valeur de ces puiſſances, a^1, a^2 a^3, a^4, &c. n'eſt pas ambiguë, auſſi celle-cy a^0 ne ſauroit etre ambigue. Il eſt donc toujours $a^0 = +1$, ce qui ſuffit pour détruire la ſeconde objection; & la troiſieme n'a aucune force, qu'entant que la ſeconde ſubſiſte.

Il paroit donc que le ſentiment de M. Leibniz eſt mieux fondé, puisqu'il n'eſt pas contraire à la découverte de M. Bernoulli, qu'il eſt

$l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$; puisque M. Leibniz ſoutient, que le logarithme de -1, & à plus forte raiſon celui de $\sqrt{-1}$, eſt imaginaire. Mais en adoptant le ſentiment de Mr. Leibniz on ſe jette dans les difficultés & contradictions ſusmentionnées. Car ſi $l-1$ étoit imaginaire, ſon double c.à d. le logarithme de $(-1)^2 = +1$ le ſeroit auſſi, ce qui ne convient pas avec le premier principe de la doctrine des logarithmes, en vertu duquel on ſuppoſe $l+1 = 0$.

De quelque coté donc qu'on ſe tourne, ſoit qu'on embraſſe le ſentiment de M. Bernoulli, ou celui de M. Leibniz, on rencontre toujours de ſi grands obſtacles à maintenir ſon parti, qu'on ne ſe ſauroit mettre à l'abri des contradictions. Cependant il ſemble, que ſi l'un de ces deux ſentimens eſt faux, l'autre doit néceſſairement être vrai; & qu'il n'y a point de milieu à choiſir. Voilà donc une queſtion extrêmement importante, qui eſt, d'etablir la doctrine des logarithmes, de telle ſorte qu'elle ne ſoit plus aſſujettie à aucune contradiction.

Mais aprés avoir bien peſé les contradictions, qui ſe trouvent de part & d'autre, on ſera porté à croire, qu'une telle conciliation eſt une choſe tout à fait impoſſible; & les ennemis des Mathematiques ne manqueront pas d'en tirer des conſéquences fort facheuſes contre la certitude de cette ſcience. Car quand les Pyrrhoniens ont attaqué toutes les ſciences, on conviendra aiſément, qu'il s'en faut beaucoup, que les objections, qu'ils ont apportées contre aucune ſcience, approchent ſeulement, à l'egard de leur ſolidité, des objections que je viens d'expoſer contre la doctrine des logarithmes. Cependant je ferai voir ſi clairement, qu'il n'y reſtera plus le moindre doute, que cette doctrine eſt ſolidement établie, & que toutes les difficultés ſusmentionnées ne tirent leur origine, que d'une ſeule idée peu juſte: de ſorte que dès qu'on rectifiera cette idée, toutes ces difficultés & contradictions, quelque fortes qu'elles ayent pu paroître, s'evanouïront dabord, & alors toute cette doctrine des logarithmes ſe ſoutiendra ſi bien, qu'on ſera en état de réſoudre aiſément toutes les objections, qui ont paru irréſolubles auparavant. Sans ce developement, qui a pourtant

été

été inconnu jusqu'ici aux Mathematiciens, je ne ſai pas, de quel oeil on devroit enviſager la doctrine des logarithmes : d'un coté on devroit avouër, qu'elle eſt vraie & auſſi ſolidement établie qu'aucune autre partie de l'Analyſe ; or de l'autre coté on ne ſauroit disconvenir, que cette même doctrine ſeroit aſſujetie à des contradictions, auxquelles il ſeroit impoſſible de répondre. On ſeroit par conſéquent obligé d'avouër, que la Mathematique, & même l'Analyſe, renferme des myſtéres incomprehenſibles à nos eſprits. Enſuite ſi ces myſteres n'ont été tels qu'à cauſe d'une ſeule idée, qui n'étoit pas entierement exacte, on en tirera cette conſéquence fort importante, qu'il eſt extremement dangereux de juger des choſes, dont on ne ſe peut former que des idées imparfaites : or il eſt bien certain, que hormis les Mathematiques le nombre des idées diſtinctes & complettes eſt fort petit.

Denoüement des Difficultés précédentes.

Il faut d'abord avoüer, que ſi l'idée, que Mrs. Leibniz & Bernoulli ont attachée au terme de logarithme, & que tous les Mathematiciens ont eu jusqu'ici, étoit parfaitement juſte, il ſeroit abſolument impoſſible de délivrer la doctrine des logarithmes des contradictions, que je viens de propoſer. Or l'idée des logarithmes étant tirée de leur origine, dont nous avons une parfaite connoiſſance, comment ſeroit-il poſſible qu'elle fut défectueuſe ? Lorsqu'on dit que le logarithme d'un nombre propoſé eſt l'expoſant de la puiſſance d'un certain nombre pris à volonté, laquelle devient égale au nombre propoſé, il ſemble qu'il ne manque rien à la juſteſſe de cette idée. Cela eſt auſſi bien vrai ; mais on accompagne communément cette idée d'une circonſtance, qui ne lui convient point : c'eſt qu'on ſuppoſe ordinairement, presque ſans qu'on s'en apperçoive, qu'à chaque nombre il ne répond qu'un ſeul logarithme ; & pour peu qu'on y réfléchiſſe, on trouvera que toutes les difficultés & contradictions, dont la doctrine des loga-

rithmes ſembloit embaraſſée, ne ſubſiſtent qu'entant qu'on ſuppoſe, qu'à chaque nombre ne répond qu'un ſeul logarithme. Je dis donc, pour faire disparoitre toutes ces difficultés & contradictions, qu'en vertu même de la définition donnée il répond à chaque nombre une infinité de logarithmes; ce que je démontrerai dans le theoreme ſuivant.

Theoreme.

Il y a toujours une infinité de logarithmes, qui conviennent également à chaque nombre propoſé: ou, ſi y *marque le logarithme du nombre* x, *je dis que* y *renferme une infinité de valeurs differentes.*

DEMONSTRATION.

Je me bornerai ici aux logarithmes hyperboliques, puisqu'on ſait que les logarithmes de toutes les autres eſpeces ſont à ceux-cy dans un rapport conſtant, ainſi quand le logarithme hyperbolique du nombre x eſt nommé $= y$, le logarithme tabulaire de ce même nombre ſera $= o,43429448190.y$. Or le fondement des logarithmes hyperboliques eſt, que ſi ω ſignifie un nombre infiniment petit, le logarithme du nombre $1+\omega$ ſera $=\omega$, ou que $l(1+\omega)=\omega$. De là il s'enſuit que $l(1+\omega)^2=2\omega$; $l(1+\omega)^3=3\omega$, & en général $l(1+\omega)^n=n\omega$. Mais puisque ω eſt un nombre infiniment petit, il eſt evident, que le nombre $(1+\omega)^n$ ne ſauroit devenir égal à quelque nombre propoſé x, à moins que l'expoſant n ne ſoit un nombre infini. Soit donc n un nombre infiniment grand, & qu'on poſe $x=(1+\omega)^n$, & le logarithme de x, qui a été nommé $=y$, ſera $y=n\omega$. Donc pour exprimer y par x, la premiere formule donnant $1+\omega=x^{\frac{1}{n}}$ & $\omega=x^{\frac{1}{n}}-1$, cette valeur étant ſubſtituée pour ω dans l'autre formule produira $y=nx^{\frac{1}{n}}-n=lx$. D'où il eſt clair que la valeur de la formule

formule $n\,x^{\frac{1}{n}} - n$ approchera d'autant plus du logarithme de x, plus le nombre n ſera pris grand; & ſi l'on met pour n un nombre infini, cette formule donnera la vraye valeur du logarithme de x. Or comme il eſt certain, que $x^{\frac{1}{2}}$ a deux valeurs differentes, $x^{\frac{1}{3}}$ trois, $x^{\frac{1}{4}}$ quatre, & ainſi de ſuite, il ſera également certain, que $x^{\frac{1}{n}}$ doit avoir une infinité de valeurs differentes, puisque n eſt un nombre infini. Par conſéquent cette infinité de valeurs differentes de $x^{\frac{1}{n}}$ produira auſſi une infinité de valeurs differentes pour $/x$, de ſorte que le nombre x doit avoir une infinité de logarithmes. C. Q. F. D.

De là il s'enſuit que le logarithme de $+1$ n'eſt pas ſeulement $= 0$, mais qu'il y a encore une infinité d'autres quantités, dont chacune eſt également le logarithme de $+1$. Cependant on comprend aiſément que tous ces autres logarithmes, hormis le premier 0 ſeront, des quantités imaginaires; de ſorte que dans le calcul on eſt en droit de ne regarder que 0 comme le logarithme de $+1$, tout de méme que lorsqu'il s'agit de la racine cubique de 1, on ne ſe ſert que de 1, quoique ces quantités imaginaires $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ſoient également des racines cubiques de 1. Mais quand on veut comparer le logarithme de 1 avec les logarithmes de -1, ou de $\sqrt{-1}$, qui ſont tous, à ce que je ferai voir dans la ſuite, imaginaires, il faut conſidérer le logarithme de 1 dans toute ſon etenduë; & alors toutes les difficultés & contradictions rapportées cy-deſſus diſparoitront d'elles memes. Car ſoient α, β, γ δ, ε, ζ, &c. les logarithmes imaginaires de l'unité, qui lui répondent auſſi bien que 0, & on comprendra aiſément qu'il peut être $2/-1 = /+1$, quoique tous les logarithmes de -1 ſoient imaginaires: car pour ſatisfaire à l'equation $2/-1 = /+1$, il ſuffit que le double de tous les logarithmes de -1, ſe trouvent parmi les logarithmes imaginaires de $+1$. De méme, puisque $4/\sqrt{-1} = /+1$,

chaque logarithme de $\sqrt{-1}$ multiplié par 4 ſe doit rencontrer dans la ſerie $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, &c. Ainſi les égalités $2l-1 = l+1$ & $4l\sqrt{-1} = l+1$, ſe peuvent maintenir, ſans qu'on ſoit obligé de ſoutenir qu'il ſoit ou $l-1 = 0$ ou $l\sqrt{-1} = 0$, comme M. Bernoulli a prétendu. Mais tout cela ſera mis dans tout ſon jour, quand je déterminerai actuellement tous les logarithmes de chaque nombre propoſé, ce qui ſera le ſujet des problemes ſuivans.

Probleme I.

Déterminer tous les logarithmes, qui répondent à un nombre affirmatif propoſé $+a$ *quelconque.*

SOLUTION.

Puiſque a eſt un nombre poſitif, il aura certainement un logarithme réel, qui ſe trouve par les régles aſſés connuës. Soit donc A ce logarithme réel du nombre a, & puiſque $a = 1.a$, il ſera $la = l1 + A$: ou bien chaque logarithme de l'unité étant ajouté à A donnera un logarithme du nombre propoſé a; & pour trouver tous ſes logarithmes, on n'a qu'à chercher tous les logarithmes de l'unité $+1$. Prenant donc y pour marquer un logarithme quelconque de $+1$, les valeurs de y doivent être tirées de l'équation du Theoreme en y mettant $x = 1$, & on aura cette équation $y = n\,1^{\frac{1}{n}} - n$, qui ſe change en $1 + \frac{y}{n} = 1^{\frac{1}{n}}$, & la délivrant des expoſans rompus, on aura $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = 1$, où n marque un nombre infini. Cette équation étant maintenant pour ainſi dire rationelle, chacune de ſes racines donnera une valeur convenable pour y, c'eſt à dire un logarithme de $+1$. Or pour trouver toutes les racines de cette équation, on ſait qu'il les faut tirer des facteurs de la formule $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1$, en ſuppoſant cha-

que

que facteur $= o$. Mais en général il eſt demontré, que d'une telle formule $p^n - q^n$ un facteur quelconque eſt $p^2 - 2pq \text{ cof.} \frac{2\lambda\pi}{n} + q^2$, où λ marque un nombre entier quelconque & π l'angle de 180°, ou la moitié de la circonference d'un cercle dont le rayon $= 1$; de ſorte que donnant à λ ſucceſſivement toutes les valeurs poſſibles, qui ſont o, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 5, &c. on obtienne enfin tous les facteurs de la formule $p^n - q^n$. Et partant toutes les racines de l'équation $p^n - q^n = o$ ſeront compriſes dans cette expreſſion générale $p = q \left(\text{cof} \frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}. \text{ fin.} \frac{2\lambda\pi}{n}\right)$, qui ſe trouve en poſant $p^2 - 2pq \text{ cof} \frac{2\lambda\pi}{n} + qq = o$. Donc toutes les racines de notre équation trouvée.

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1 = o$$

poſant $p = 1 + \frac{y}{n}$ & $q = 1$ ſeront contenuës dans cette expreſſion générale

$$1 + \frac{y}{n} = \text{cof} \frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}. \text{ fin} \frac{2\lambda\pi}{n}.$$

Or puisque n marque un nombre infini, l'arc $\frac{2\lambda\pi}{n}$ ſera infiniment petit; il ſera donc

$$\text{cof} \frac{2\lambda\pi}{n} = 1 \qquad \& \qquad \text{fin} \frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n}$$

d'où il s'enſuit $1 + \frac{y}{n} = 1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$, & partant

$$y = \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}.$$

On n'a qu'a ſubſtituer maintenant pour λ ſucceſſivement toutes les valeurs

leurs déterminées qu'elle renferme, ſavoir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. à l'infini; & tous les logarithmes de l'unité, ou toutes les valeurs poſſibles de $l\,1$ ſeront:

$$0;\ \pm 2\pi\sqrt{-1};\ \pm 4\pi\sqrt{-1};\ \pm 6\pi\sqrt{-1};\ \pm 8\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

Donc tous les logarithmes du nombre propoſé a, dont on ſait déjà le logarithme réel A, ſeront:

$$A;\ A\pm 2\pi\sqrt{-1};\ A\pm 4\pi\sqrt{-1};\ A\pm 6\pi\sqrt{-1};\ A\pm 8\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

C. Q. F. T.

De là il eſt clair, que chaque nombre poſitif n'a qu'un ſeul logarithme réel, & que tous ſes autres logarithmes infinis ſont imaginaires. Cependant tous ces logarithmes imaginaires joüiſſent de la meme propriété que le réel, & on s'en pourroit ſervir également dans le calcul en obſervant les memes régles. Car ſoient A, B, C, D &c. les logarithmes réels des nombres poſitifs a, b, c, d, &c. de ſorte qu'il ſoit en général.

$$la = A\pm 2\lambda\pi\sqrt{-1};\ lb = B\pm 2\mu\pi\sqrt{-1};\ lc = C\pm 2\nu\pi\sqrt{-1}\ \&c.$$

Maintenant ſoit $c = ab$, & on ſait qu'il ſera $C = A + B$: or prenant les logarithmes en général on verra auſſi, que la ſomme des logarithmes des facteurs a, b eſt toujours égale au logarithme du produit $ab = c$. Car on aura

$$la + lb = A + B \pm 2\zeta\pi\sqrt{-1}$$

mettant pour ζ un nombre quelconque entier, qui peut réſulter en ajoutant les termes $\pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$ & $\pm 2\mu\pi\sqrt{-1}$. Or il eſt clair que mettant $A + B = C$ cette expreſſion de $la + lb$ convient parfaitement avec celle-cy $lc = C \pm 2\nu\pi\sqrt{-1}$. Le même accord ſe trouvera auſſi dans la diviſion, l'élevation aux puiſſances, & l'extraction des racines, où l'on fait uſage des logarithmes. Mais pour ce qui regarde l'extraction des racines, comme le nombre des racines eſt toujours égal à l'expoſant du ſigne radical, cette maniere d'exprimer les logarithmes généralement a cet avantage ſur la maniere ordi-

ordinaire, qu'elle nous découvre toutes les racines; au lieu que par la methode ordinaire on ne trouve dans chaque cas, qu'une racine, favoir la réelle & qui eſt en même tems poſitive : ce qu'on reconnoitra plus évidemment, lorsque j'aurai déterminé tous les logarithmes des nombres tant negatifs qu'imaginaires.

Probleme II.

Déterminer tous les logarithmes, qui répondent à un nombre negatif quelconque $-a$.

SOLUTION.

Puisque $-a = -1.a$, il ſera $l-a = la + l-1$, & prenant pour la le logarithme réel de a, on aura tous les logarithmes du nombre negatif $-a$, ſi l'on cherche tous les logarithmes de -1. Mais ayant vu, que mettant y pour le logarithme du nombre x en général, il eſt $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$, d'où l'on tire, $1 + \frac{y}{n} = x^{\frac{1}{n}}$ & partant $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - x = 0$. Donc y exprimera tous les logarithmes de -1 ſi l'on met $x = -1$, de ſorte que tous les logarithmes de -1 ſeront les racines de cette équation

$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0$, poſant le nombre n infiniment grand.

Or on ſait que de cette équation générale $p^n + q^n = 0$ toutes les racines ſe trouvent de la réſolution de cette formule $p^2 - 2pq \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} + q^2 = 0$, prenant pour λ ſucceſſivement tous les nombres entiers tant affirmatifs que negatifs : & partant on aura $p = q\left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm V-1. \text{ ſin. } \frac{(2\lambda-1)\pi}{n}\right)$. Donc les racines de cette équation propoſée :

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n+1=0,$$

ſeront toutes compriſes dans cette formule générale :

$$1+\frac{y}{n}=\text{cof}\ \frac{(2\lambda-1)\pi}{n}\pm\sqrt{-1}.\ \text{ſin.}\ \frac{(2\lambda-1)\pi}{n},$$

laquelle à cauſe de $n=\infty$. ſe change en

$$y=\pm\ (2\lambda-1)\pi\ \sqrt{-1}.$$

Par conſéquent mettant pour λ ſucceſſivement toutes les valeurs, qui lui conviennent, tous les logarithmes de -1 ſeront:

$\pm\pi\sqrt{-1}$; $\pm 3\pi\sqrt{-1}$; $\pm 5\pi\sqrt{-1}$; $\pm 7\pi\sqrt{-1}$; $\pm 9\pi\sqrt{-1}$; &c.

Donc ſi nous poſons $l+a=A$, ou que A marque le logarithme réel du nombre poſitif $+a$, tous les logarithmes du nombre negatif $-a$ ſeront :

$A\pm\pi\sqrt{-1}$; $A\pm 3\pi\sqrt{-1}$; $A\pm 5\pi\sqrt{-1}$; $A\pm 7\pi\sqrt{-1}$; &c.

dont le nombre eſt infini. C. Q. F. T.

De là il eſt clair, que tous les logarithmes d'un nombre negatif quelconque, ſont imaginaires, & qu'il n'y a aucun nombre negatif, dont un de ſes logarithmes ſoit réel. Mr. Leibniz a eu donc raiſon de ſoutenir, que les logarithmes des nombres negatifs étoient imaginaires. Cependant puisque les nombres affirmatifs ont auſſi une infinité de logarithmes imaginaires, toutes les objections de M. Bernoulli contre ce ſentiment perdent leur force. Car quoiqu'il ſoit $l-1=\pm(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$ le logarithme de ſon quarré ſera $l(-1)^2=\pm 2(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$ expreſſion qui ſe trouve parmi les logarithmes de $+1$, de ſorte qu'il demeure vrai que $2l-1=l+1$, quoique nul des logarithmes de -1 ſe trouve parmi les logarithmes de $+1$. Soit A le logarithme réel du nombre poſitif $+a$, & que p marque en général tous les nombres pairs, & q tous les nombres impairs entiers : & ayant en général :

$$l+1=\pm p\pi\sqrt{-1}\quad\&\quad l-1=\pm q\pi\sqrt{-1}.$$

&

& $l+a = A \pm p\pi\sqrt{-1}$ & $l-a = A \pm q\pi\sqrt{-1}$.

d'où l'on voit que $l(-a)^2 = 2l-a = 2A \pm 2q\pi\sqrt{-1}$. Or $2q$ étant $= p$, & $2A$ le logarithme réel de a^2, on voit que $2A \pm p\pi\sqrt{-1}$ eſt la formule générale des logarithmes de a^2; ainſi il eſt $l(-a)^2 = la^2$ ou bien $2l-a = 2l+a$, ſans qu'il ſoit $l-a = l+a$: ce qui ſeroit ſans doute contradictoire, ſi les nombres $+a$ & $-a$ n'avoient qu'un ſeul logarithme; car alors on auroit raiſon de conclure, qu'il fut $l-a = l+a$ s'il etoit $2l-a = 2l+a$. Mais dès qu'on tombe d'accord, que tant $-a$ que $+a$ ont une infinité de logarithmes, cette conſéquence, toute néceſſaire qu'elle fut auparavant, n'eſt plus juſte; puisque pour qu'il ſoit $2l-a = 2l+a$, il ſuffit, que les doubles de tous les logarithmes de $-a$ ſe rencontrent dans les logarithmes de $+aa$. Ce qui peut arriver, comme nous voyons, ſans qu'aucun des logarithmes de $-a$ ſoit égal à aucun des logarithmes de $+a$.

Il faut cependant avouër que toutes les valeurs de $2l-a$ ſont differentes des valeurs de $2l+a$, vu qu'il eſt:

$$2l+a = 2A \pm 2p\pi\sqrt{-1} \quad \& \quad 2l-a = 2A \pm 2q\pi\sqrt{-1},$$

où $2p$ marque un nombre pairement pair, & $2q$ un nombre impairement pair quelconque. Mais il faut remarquer que les logarithmes de $+a^2$, comme d'un nombre affirmatif dont le logarithme réel eſt $= 2A$, ſont compris dans cette formule générale $la^2 = 2A \pm p\pi\sqrt{-1}$, où p marque un nombre pair quelconque ſans en excepter zero. Cela remarqué il eſt clair, que toutes les valeurs de $2l-a$ ſont compriſes dans celles de la^2, auſſi bien que celles de $2l+a$. Ainſi quoiqu'on puiſſe dire que $2l-a = la^2$ & $2l+a = la^2$, prenant le ſigne de $=$ pour marquer, que les valeurs de $2l-a$ ou de $2l+a$ ſe rencontrent parmi les valeurs de la^2; on ne ſauroit dire à la verité qu'il ſoit $2l-a = 2l+a$. Néantmoins comme dans les formules $l+a = A \pm p\pi\sqrt{-1}$ & $l-a = A \pm q\sqrt{-1}$ les nombres p & q ſont indéterminés, rien n'oblige qu'en doublant ces logarithmes on prenne pour p & q les mêmes nombres. Ainſi pour faire ces multi-

plications dans toute leur étenduë, que p, p', p'', p''' &c. marquent des nombres pairs quelconques égaux ou inégaux, & q, q', q'', q''', &c. des nombres impairs égaux ou inégaux entr'eux ; ces duplications ſe feront de la maniere ſuivante :

$$\begin{array}{l|l} l+a = A \pm p\pi\sqrt{-1} & l-a = A \pm q\pi\sqrt{-1} \\ \underline{l+a = A \pm p'\pi\sqrt{-1}} & \underline{l-a = A \pm q'\pi\sqrt{-1}} \\ 2l+a = 2A \pm (p+p')\pi\sqrt{-1} & 2l-a = 2A \pm (q+q')\pi\sqrt{-1} \end{array}$$

Ici maintenant $p+p'$ marquant la ſomme de deux nombres pairs quelconques, & $q+q'$ la ſomme de deux nombres impairs quelconques, tant $p+p'$ que $q+q'$ marquera un nombre pair quelconque; & partant il ſera $p+p' = q+q'$, donc $2l-a = 2l+a$. Par conſéquent dans ce ſens on pourra ſoutenir qu'il eſt $2l-a = 2l+a$, ſans qu'il ſoit $l-a = l+a$. De même maniere il ſera

$$3l+a = 3A \pm (p+p'+p'')\pi\sqrt{-1} = 3A \pm p\pi\sqrt{-1} = l+a^3$$
$$3l-a = 3A \pm (q+q'+q'')\pi\sqrt{-1} = 3A \pm q\pi\sqrt{-1} = l-a^3$$

car $p+p'+p''$ produit tous les nombres pairs, & convient par conſéquent avec p ; pareillement $q+q'+q''$ produit tous les nombres impairs & convient avec q. Or puisque $q+q'+q''+q'''$ produit tous les nombres pairs, cette expreſſion ſera équivalente avec p : dont les quadruples ſeront :

$$4l+a = 4A \pm (p+p'+p''+p''')\pi\sqrt{-1} = 4A \pm p\pi\sqrt{-1} = l+a^4$$
$$4l-a = 4A \pm (q+q'+q''+q''')\pi\sqrt{-1} = 4A \pm p\pi\sqrt{-1} = l+a^4$$

Ainſi cette maniere de trouver les logarithmes des puiſſances tant de $+a$ que de $-a$ s'accorde parfaitement bien avec les principes connus tant des puiſſances que des logarithmes. & toutes les objections rapportées cy-deſſus n'ont plus aucune priſe ſur ces vérités demontrées. Le même accord s'obſervera auſſi dans les logarithmes des quantités imaginaires, que je m'en vai développer dans le problème ſuivant.

Proble-

Probleme III.

Déterminer tous les logarithmes d'une quantité imaginaire quelconque.

SOLUTION.

Il eſt démontré que toute quantité imaginaire, quelque compliquée qu'elle ſoit, ſe réduit toujours à cette forme $a+bV-1$, où a & b ſont des quantités réelles. Je poſe maintenant $V(aa+bb)=c$, & $\frac{a}{V(aa+bb)}$ & $\frac{b}{V(aa+bb)}$ feront le coſinus & le ſinus d'un certain angle, qu'il ſera aiſé de trouver par les tables. Soit donc cet angle $=\Phi$, qui marque en même tems la quantité de l'arc de cercle, qui eſt ſa meſure, le ſinus total étant poſé $=1$. On aura donc $a=c\ \text{cof}\,\Phi$ & $b=c\ \text{ſin}\,\Phi$; & la formule imaginaire, dont il faut chercher tous les logarithmes, ſera

$$a+bV-1=c\,(\text{cof}\,\Phi+V-1.\text{ſin}\,\Phi)$$

ou, puiſque c eſt un nombre affirmatif, ſoit C ſon logarithme réel, & on aura:

$$l(a+bV-1)=C+l(\text{cof}\,\Phi+V-1.\text{ſin}\,\Phi)$$

Il s'agit donc de chercher tous les logarithmes de la quantité imaginaire $\text{cof}\,\Phi+V-1.\text{ſin}\,\Phi$, laquelle étant miſe pour x, ſes logarithmes ſeront les valeurs de y tirées de cette équation $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n-x=0$, n marquant un nombre infini. Mais pour pouvoir comparer cette équation avec la forme générale $/^n-q^n=0$, je remarque que $x=\text{cof}\,\Phi+V-1.\text{ſin}\,\Phi=\left(1+\frac{\Phi V-1}{n}\right)^n$, dont la vérité eſt ſuffiſamment prouvée ailleurs. Car on ſait que

$$\text{cof}\,\Phi=1-\frac{\Phi^2}{1.2.}+\frac{\Phi^4}{1.2.3.4.}-\frac{\Phi^6}{1.2.3.4.5.6.}+\&c.$$

$$\& \text{ ſin } \Phi = \Phi - \frac{\Phi^3}{1.2.3.} + \frac{\Phi^5}{1.2.3.4.5.} - \&c.$$

Or puiſque n eſt un nombre infini, il ſera:

$$\left(1 + \frac{\Phi V-1}{n}\right)^n = 1 + \frac{\Phi V-1}{1} - \frac{\Phi^2}{1.2} - \frac{\Phi^3 V-1}{1.2.3} + \frac{\Phi^4}{1.2.3.4} + \frac{\Phi^5 V-1}{1.2.3.4.5} - \&c.$$

d'où il eſt clair que $\left(1 + \frac{\Phi V-1}{n}\right)^n = \text{cof } \Phi + V-1 . \text{ ſin } \Phi$. Nous aurons donc $p = 1 + \frac{y}{n}$ & $q = \frac{1 + \Phi V-1}{n}$, pour l'équation à reſoudre $p^n - q^n = 0$. Mais ayant vu déjà que chacune des racines de cette équation eſt contenuë dans cette formule générale $p = q\left(\text{cof } \frac{2\lambda\pi}{n} \pm V-1 . \text{ſin } \frac{2\lambda\pi}{n}\right)$, prenant pour λ tous les nombres entiers, ou affirmatifs ou negatifs, il ſera pour notre cas:

$$1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{\Phi V-1}{n}\right)\left(\text{cof } \frac{2\lambda\pi}{n} \pm V-1 . \text{ſin } \frac{2\lambda\pi}{n}\right)$$

& parce que à cauſe du nombre n infini il eſt $\text{cof } \frac{2\lambda\pi}{n} = 1$ & $\text{ſin } \frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n}$, il ſera $1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{\Phi V-1}{n}\right)\left(1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n} V-1\right)$; ce qui donne $y = \Phi V - 1 \pm 2\lambda\pi V - 1$: d'où tous les logarithmes de la formule $\text{cof } \Phi + \text{ſin } \Phi . V - 1$ ſeront:

$\Phi V-1$; $(\Phi \pm 2\pi) V-1$; $(\Phi \pm 4\pi) V-1$; $(\Phi \pm 6\pi) V-1$; &c.

& les logarithmes de la formule imaginaire $a \pm b V - 1$, poſant $c = V(aa+bb)$, & $\text{tang } \Phi = \frac{b}{a}$, ou $\text{cof } \Phi = \frac{a}{c}$ & $\text{ſin } \Phi = \frac{b}{c}$, & de plus $lc = C$, ſeront:

$C+\Phi V-1$; $C+(\Phi \pm 2\pi) V-1$; $C+(\Phi \pm 4\pi) V-1$; $C+(\Phi \pm 6\pi) V-1$; &c.

C. Q. F. T.

Delà

De là il eſt clair, que tous les logarithmes d'une quantité imaginaire ſont auſſi imaginaires; car, lorsque ou $\Phi = 0$, ou $\Phi = \pm 2\lambda\pi$, qui ſont les cas où quelcun de ces logarithmes pourroit devenir réel, cela ne peut arriver, que lorsque tang $\Phi = \frac{b}{a} = 0$; il ſeroit donc $b = 0$, & la quantité $a + b\sqrt{1}$ ceſſeroit d'être imaginaire. Donc, ſi l'on prend p pour ſignifier chaque nombre pair, ou affirmatif ou negatif, tous les logarithmes de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ ſeront renfermés dans cette formule générale $C + (\Phi + p\pi)\sqrt{-1}$, où C eſt le logarithme réel de la quantité affirmative $\sqrt{(aa + bb)} = c$, & l'arc ou l'angle Φ eſt pris tel, qu'il eſt ſin $\Phi = \frac{b}{c}$ & cof $\Phi = \frac{a}{c}$. Or puisqu'il y a une infinité d'angles, qui conviennent au meme ſinus $\frac{b}{c}$ & coſinus $\frac{a}{c}$, qui ſont tous compris dans la formule $\Phi + p\pi$, on pourroit omettre le terme $p\pi$, & dire que le logarithme de $a + b\sqrt{-1}$ eſt en général $= C + \Phi\sqrt{-1}$; puisque cet angle Φ renferme déjà tous ces angles. Cependant ſi l'on prend pour Φ le plus petit angle affirmatif, qui répond au ſinus $\frac{b}{c}$ & au coſinus $\frac{a}{c}$; la formule générale des logarithmes de $a + b\sqrt{-1}$ ſera $= C + (\Phi + p\pi)\sqrt{-1}$.

Si l'angle Φ eſt tel, qu'il tient une raiſon commenſurable avec π ou la circonference du cercle, ce ſera toujours une marque, qu'une certaine puiſſance de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ devient réelle. Car ſoit $\Phi = \frac{\mu}{\nu}\pi$, & puisqu'il eſt $l(a + b\sqrt{-1}) = C + \left(\frac{\mu}{\nu}\pi + p\pi\right)\sqrt{-1}$: il ſera

$$l(a + b\sqrt{-1})^{\nu} = \nu C + (\mu + \nu p)\pi\sqrt{-1}.$$

d'où l'on voit que ſi $\mu + \nu p$ eſt un nombre pair, ou ſeulement μ pair, la puiſ-

ſance

tance $(a+b\sqrt{-1})^{\nu}$ ſera un nombre réel affirmatif, & même $= c^{\nu} = \left(\sqrt{(aa+bb)}\right)^{\nu}$: or ſi $\mu+\nu p$, ou ſeulement μ eſt un nombre impair, la puiſſance $(a+b\sqrt{-1})^{\nu}$ ſera un nombre negatif $= -c^{\nu}$.

Jusqu'ici on auroit pu croire, qu'il ſeroit indifferent de donner à π quelque valeur que ce ſoit, puisqu'il ne paroiſſoit rien; ni dans les logarithmes des nombres affirmatifs $l+a = A \pm p\pi\sqrt{-1}$, ni dans ceux des nombres negatifs $l-a = A \pm q\pi\sqrt{-1}$, d'où nous puiſſions comprendre, pourquoi la lettre π dût plutôt marquer la demi-circonference d'un cercle décrit du rayon $= 1$, que tout autre nombre. Mais à préſent, où il s'agit des logarithmes des nombres imaginaires, la raiſon en devient évidente; puisqu'il faut comparer l'angle Φ à π, de ſorte que ſi l'on donnoit à π toute autre valeur que celle de deux angles droits, les formules deviendroient fauſſes, & ne ſeroient plus d'accord avec celles, que nous avons trouvées pour les nombres affirmatifs & negatifs.

Pour faire voir cela plus clairement, ſuppoſons $c = 1$ & $C = 0$, pour avoir cette formule $\cos\Phi + \sqrt{-1}.\sin\Phi$, dont tous les logarithmes ſeront renfermés dans cette formule générale

$$l(\cos\Phi + \sqrt{-1}.\sin\Phi) = (\Phi + p\pi)\sqrt{-1}$$

p marquant un nombre entier pair quelconque, ſoit affirmatif, ſoit negatif, ou même zero.

De la nous tirerons premiérement d'abord les formules ſupérieures pour les logarithmes des nombres réels affirmatifs ou negatifs. Car ſoit $\Phi = 0$, & à cauſe de $\cos\Phi = 1$ & $\sin\Phi = 0$, il ſera $l+1 = p\pi\sqrt{-1}$, ou bien en détaillant

$l+1 = 0; \pm 2\pi\sqrt{-1}; \pm 4\pi\sqrt{-1}; \pm 6\pi\sqrt{-1}; \pm 8\pi\sqrt{-1}$; &c.

or mettant $\Phi = \pi = 180$, à cauſe de $\cos\Phi = -1$ & $\sin\Phi = 0$, il ſera $l-1 = (1+p)\pi\sqrt{-1} = q\pi\sqrt{-1}$, prenant q pour marquer un nombre impair quelconque. On aura donc:

$l-1 = \pm\pi\sqrt{-1}; \pm 3\pi\sqrt{-1}; \pm 5\pi\sqrt{-1}; \pm 7\pi\sqrt{-1}$; &c.

Deve-

Dévelopons maintenant auſſi les cas les plus ſimples des nombres imaginaires, & ſoit:

1. $\Phi = 90° = \frac{1}{2}\pi$, & à cauſe de $\cos\Phi = 0$ & $\sin\Phi = +1$, il ſera $l + V-1 = (\frac{1}{2} + p)\pi V - 1$; donc tous les logarithmes de $+V-1$ ſeront:

$\frac{1}{2}\pi V-1$; $\frac{5}{2}\pi V-1$; $\frac{9}{2}\pi V-1$; $\frac{13}{2}\pi V-1$; $\frac{17}{2}\pi V-1$; &c.
$-\frac{3}{2}\pi V-1$; $-\frac{7}{2}\pi V-1$; $-\frac{11}{2}\pi V-1$; $-\frac{15}{2}\pi V-1$; $-\frac{19}{2}\pi V-1$; &c.

Ajoutant ici deux valeurs quelconques enſemble pour avoir le logarithme de $l(+V-1)^2$, c'eſt à dire de $l-1$, on trouvera ou $\pm\pi V-1$, ou $\pm 3\pi V-1$; ou $\pm 5\pi V-1$; &c. qui ſont tous des logarithmes de -1.

2. Soit $\Phi = 270° = \frac{3}{2}\pi$, & à cauſe de $\cos\Phi = 0$ & $\sin\Phi = -1$ il ſera $l - V-1 = (-\frac{1}{2} + p)\pi V - 1$; donc tous les logarithmes de $-V-1$ ſeront contenus dans les expreſſions ſuivantes:

$+\frac{3}{2}\pi V-1$; $+\frac{7}{2}\pi V-1$; $+\frac{11}{2}\pi V-1$; $+\frac{15}{2}\pi V-1$; $+\frac{19}{2}\pi V-1$; &c.
$-\frac{1}{2}\pi V-1$; $-\frac{5}{2}\pi V-1$; $-\frac{9}{2}\pi V-1$; $-\frac{13}{2}\pi V-1$; $-\frac{17}{2}\pi V-1$; &c.

où il eſt clair comme auparavant, que deux valeurs quelconques étant ajoutées enſemble donnent $q\pi V-1$, poſant q pour un nombre impair quelconque; ce qui eſt le logarithme -1 ou de $(-V-1)^2$. De plus ſi l'on ajoute un logarithme quelconque de $-V-1$ à un logarithme quelconque de $+V-1$, pour avoir un logarithme du produit $(+V-1).(-V-1)$, qui eſt $= +1$, on ne trouvera en effet que des logarithmes de $+1$. Et il eſt clair de même qu'il ſera:

$l(+V-1) + l(-V-1) = l-1$ ou $l(-V-1) + l(+V-1) = l-1$

tout comme la nature de ces expreſſions exige.

3. Soit $\Phi = 60° = \frac{1}{3}\pi$ ou $\cos\Phi = \frac{1}{2}$ & $\sin\Phi = \frac{V3}{2}$; on trouvera $l\frac{1+V-3}{2} = (\frac{1}{3} + p)\pi V - 1$, de ſorte que tous les lo-

garithmes de cette expreſſion imaginaire $\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}$ ſeront:

$+\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{7}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{13}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{19}{3}\pi\sqrt{-1}$; $\frac{25}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

$-\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{11}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{17}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{23}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{29}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

où il eſt clair, que trois quelconques de ces logarithmes étant ajoutées enſemble produiſent $q\,\pi\sqrt{-1}$, ou quelcun des logarithmes de -1, puisque $\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = -1$.

4. Soit $\Phi = 120° = \frac{2}{3}\pi$ ou $\cos\Phi = -\frac{1}{2}$ & $\sin\Phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; & l'on trouvera $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = (\frac{2}{3}+p)\,\pi\sqrt{-1}$. Ainſi tous les logarithmes de la formule imaginaire $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ſeront:

$+\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{8}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{14}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{20}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{26}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

$-\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{10}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{16}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{22}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{28}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

& puisque $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1$, on verra qu'on obtient effectivement les logarithmes de $+1$ en ajoutant enſemble trois quelconques de ces logarithmes.

5. Soit $\Phi = 240° = \frac{4}{3}\pi$, ou $\cos\Phi = -\frac{1}{2}$ & $\sin\Phi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, & l'on aura $l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = (\frac{4}{3}+p)\,\pi\sqrt{-1}$, de ſorte que tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ſeront:

$+\frac{2}{4}\pi$

$+\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{10}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{16}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{22}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{28}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

$-\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{8}{3}\sqrt{\pi}-1$; $-\frac{14}{3}\pi\sqrt{-1}$: $-\frac{20}{3}\pi\sqrt{-1}$: $-\frac{26}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

d'où l'on tirera comme auparavant, en ajoutant trois quelconques de ces logarithmes enſemble, quelcun des logarithmes de $+1$, puisqu'il eſt $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1$. De même deux de ces logarithmes quelconques ajoutés enſemble produiront un logarithme de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; car il eſt $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Et puisqu'il eſt réciproquement $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, on verra auſſi, que la ſomme de deux logarithmes quelconques de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ produit un logarithme de $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

6. Soit $\Phi = 300° = \frac{5}{3}\pi$ ou $\cos\Phi = \frac{1}{2}$ & $\sin = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; & l'on aura $l\frac{1-\sqrt{-3}}{2} = (\frac{5}{3}+p)\pi\sqrt{-1}$. Par conſéquent les logarithmes de cette formule $\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}$ ſeront

$+\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{11}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{17}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{23}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{29}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

$-\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{7}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{13}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{19}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{25}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

Où il eſt évident, que trois quelconques de ces logarithmes étant ajoutés enſemble donnent un logarithme de -1, conformément à ce qu'il eſt $\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = -1$. Et en général on verra toujours, que tou-

tes les operations, qu'on fera avec ces logarithmes, ſont parfaitement d'accord avec les opérations rélatives faites avec les nombres, qui leur conviennent; de ſorte qu'on ne rencontrera plus le moindre inconvenient à l'egard des opérations en logarithmes, & de celles qui leur répondent en nombres.

7. Soit $\Phi = 45° = \frac{1}{4}\pi$ ou $\text{cof}\,\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\text{ſin}\,\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$; & l'on aura $l\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{4}+p)\pi\sqrt{-1}$. Ainſi tous les logarithmes de cette expreſſion imaginaire $\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ feront.

$+\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{9}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{17}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{25}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{33}{4}\pi\sqrt{-1}$; &c.
$-\frac{7}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{15}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{23}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{31}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{39}{4}\pi\sqrt{-1}$; &c.

8. Soit $\Phi = 135° = \frac{3}{4}\pi$; ou $\text{cof}\,\Phi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ & $\text{ſin}\,\Phi = +\frac{1}{\sqrt{2}}$; & l'on aura $l\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{3}{4}+p)\pi\sqrt{-1}$. Et partant tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ feront:

$+\frac{3}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{11}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{19}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{27}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{35}{4}\pi\sqrt{-1}$; &c.
$-\frac{5}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{13}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{21}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{29}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{37}{4}\pi\sqrt{-1}$; &c.

Chacun de ces logarithmes étant ajouté à quelcun des précedens de $\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ produit un logarithme de la forme $q\pi\sqrt{-1}$ ou de -1, tout comme il faut, puisque $\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = -1$

9. Soit $\Phi = 225° = \frac{5}{4}\pi$ ou $\text{cof}\,\Phi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ & $\text{ſin}\,\Phi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$; & l'on

aura

aura $l\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{5}{4}+p)\pi\sqrt{-1}$. Donc tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ feront:

$$+\tfrac{5}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{13}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{21}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{29}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$
$$-\tfrac{3}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{11}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{19}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{27}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

qui ſont les negatifs des précedens; ce qui eſt auſſi parfaitement bien d'accord avec les opérations analytiques, puiſqu'il eſt $\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = 1 : \left(\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)$ & partant $l\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = -l\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$.

10. Soit $\Phi = 315° = \frac{7}{4}\pi$, ou $\cos\Phi = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\sin\Phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où l'on aura $l\frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{7}{4}+p)\pi\sqrt{-1}$. Par conſéquent tous les logarithmes de cette formule $\frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ feront:

$$+\tfrac{7}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{15}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{23}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{31}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$
$$-\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{9}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{17}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{25}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

Tous ces logarithmes des quatre derniers articles ont cette propriété que chacun multiplié par 4 produit un logarithme de -1, ce qui eſt conforme à la verité; puiſque les quarré-quarrés de ces quatre formules:

$$\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}};\quad \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}};\quad \frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}};\quad \frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

produiſent le nombre -1.

Ces exemples ſuffiſent pour faire voir, que l'idée des logarithmes que je viens d'établir eſt la véritable, & qu'elle eſt parfaitement d'accord

cord avec toutes les opérations, que la théorie des logarithmes renferme : de ſorte qu'on n'y rencontre plus aucune difficulté ; & que toutes les contradictions, auxquelles cette doctrine paroiſſoit aſſujettie, diſparoiſſent entiérement. Par conſéquent la grande controverſe, qui partagea autrefois Mrs. Leibniz & Bernoulli, eſt à preſent parfaitement décidée, enſorte que ni l'un ni l'autre ne trouveroit plus le moindre ſujet de refuſer ſon conſentement.

La belle découverte de Mr. Bernoulli, de ramener la quadrature du cercle aux logarithmes imaginaires, ſe trouve auſſi non ſeulement parfaitement d'accord avec cette théorie, mais elle en eſt une ſuite néceſſaire, & eſt portée même par là à une infiniment plus grande étendue: puiſque nous voyons, que les logarithmes de tous les nombres, entant qu'ils ſont imaginaires, dépendent tous de la quadrature du cercle. Ainſi les logarithmes de $+1$ étant $\pm p\pi\sqrt{-1}$, il ſera $\frac{l+1}{\sqrt{-1}}$ toujours une quantité réelle, mais qui renferme une infinité de valeurs, à cauſe de l'infinité des logarithmes de $+1$. Conſéquemment à cela, ſi l'on poſe le rapport du diametre à la circonference $= 1 : \pi$, toutes les valeurs de cette expreſſion $\frac{l+1}{\sqrt{-1}}$ feront les ſuivantes:

$$0;\ \pm 2\pi;\ \pm 4\pi;\ \pm 6\pi;\ \pm 8\pi;\ \pm 10\pi;\ \&c.$$

De même les logarithmes de -1 étant diviſés par $\sqrt{-1}$ fourniront les quantités réelles ſuivantes, qui renferment également la quadrature du cercle. Car les valeurs de

$$\frac{l-1}{\sqrt{-1}} \text{ ſont } \pm\pi;\ \pm 3\pi;\ \pm 5\pi;\ \pm 7\pi;\ \pm 9\pi;\ \&c.$$

De la même maniere on verra, que les valeurs des expreſſions ſuivantes ſeront :

Les

Les valeurs de	feront celles-cy à l'infini
$\frac{l(+\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$	$+\frac{1}{2}\pi$; $+\frac{5}{2}\pi$; $+\frac{9}{2}\pi$; $+\frac{13}{2}\pi$; $+\frac{17}{2}\pi$; &c.
	$-\frac{3}{2}\pi$; $-\frac{7}{2}\pi$; $-\frac{11}{2}\pi$; $-\frac{15}{2}\pi$; $-\frac{19}{2}\pi$; &c.
$\frac{l(-\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$	$+\frac{3}{2}\pi$; $+\frac{7}{2}\pi$; $+\frac{11}{2}\pi$; $+\frac{15}{2}\pi$; $+\frac{19}{2}\pi$; &c.
	$-\frac{1}{2}\pi$; $-\frac{5}{2}\pi$; $-\frac{9}{2}\pi$; $-\frac{13}{2}\pi$; $-\frac{17}{2}\pi$; &c.

& on tirera également des autres exemples developés cy-deſſus de ſemblables expreſſions réelles, qui renfermeront toutes la quadrature du cercle.

J'ai déjà fait ſentir le bel accord de ces logarithmes avec l'extraction des racines, ayant fait voir que les doubles tant des logarithmes de -1, que de $+1$, ſont contenus parmi les logarithmes de $+1$, puiſqu'il eſt $1 = (+1)^2 = (-1)^2$: de même puiſque il eſt

$$1 = (+1)^3 = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3$$

on verra, que les triples des logarithmes de $+1$, de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & de $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ſe trouvent parmi les logarithmes de $+1$. Mais je remarque ici de plus, comme 1 n'a que ces deux racines quarrées $+1$ & -1, ainſi ſi l'on range les doubles de tous les logarithmes tant de $+1$, que de -1 dans une ſuite, on obtiendra la ſerie complette de tous les logarithmes de $+1$; car:

$2l+1$ eſt 0; $\pm 4\pi\sqrt{-1}$; $\pm 8\pi\sqrt{-1}$; $\pm 12\pi\sqrt{-1}$; &c.

$2l-1$ eſt $\pm 2\pi\sqrt{-1}$; $\pm 6\pi\sqrt{-1}$; $\pm 10\pi\sqrt{-1}$; &c.

De la même maniere les trois racines cubiques de $+1$ étant $+1$; $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, ſi l'on range les triples de tous les loga-

logarithmes de ces trois racines dans une ſuite, il en réſultera la ſuite complette des logarithmes de $+1$, car:

$3l+1$ donne $0; \pm 6\pi\sqrt{-1}; \pm 12\pi\sqrt{-1}; \pm 18\pi\sqrt{-1}$ &c.

$3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\ldots$ $+2\pi\sqrt{-1}; +8\pi\sqrt{-1}; +14\pi\sqrt{-1}$; &c.
$-4\pi\sqrt{-1}; -10\pi\sqrt{-1}; -16\pi\sqrt{-1}$; &c.

$3l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\ldots$ $+4\pi\sqrt{-1}; +10\pi\sqrt{-1}; +16\pi\sqrt{-1}$; &c.
$-2\pi\sqrt{-1}; -8\pi\sqrt{-1}; -14\pi\sqrt{-1}$; &c.

Dans ces trois ſeries chaque logarithme de $+1$ ſe trouve, & aucun ne s'y rencontre qu'une ſeule fois; ce qui eſt une marque, que l'unité n'a que ces trois racines cubiques, & qu'il faut les trois enſemble pour épuiſer la nature de l'unité.

Il en eſt de même de toutes les autres racines de l'unité, & comme les racines quarré-quarrées de $+1$ ſont:

$$+1, \quad -1; \quad +\sqrt{-1}; \quad \& \; -\sqrt{-1}$$

on verra que les quadruples des logarithmes de chacune de ces racines ne donnent que la quatriéme partie des logarithmes de $+1$. Or tous ces quadruples de toutes les quatre racines enſemble, produiſent toute la ſuite des logarithmes de $+1$. Il eſt auſſi remarquable que tous les logarithmes d'une racine quelconque ſont differens des logarithmes de toute autre racine du même nom. Cependant quoique ces deux logarithmes $l+1$ & $l-1$ ſoient differens entr'eux, il eſt néanmoins $2l+1 = l+1$ & $2l-1 = l+1$, ſans qu'il ſoit $2l+1 = 2l-1$. De la même maniere ces trois logarithmes $l+1$; $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & $l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ſont differens entr'eux; cependant nonobſtant cette inégalité il eſt

$$2l+1 = l+1; \; 3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = l+1; \; \& \; 3l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = l+1.$$

Nous

Nous voyons donc qu'il eſt eſſentiel à la nature des logarithmes, que chaque nombre ait une infinité de logarithmes, & que tous ces logarithmes ſoient differens non ſeulement entr'eux, mais auſſi de tous les logarithmes de tout autre nombre. Il en eſt de même des logarithmes, que des angles, ou des arcs de cercle; car, comme à chaque ſinus & coſinus répond une infinité d'arcs differens, ainſi à chaque nombre convient une infinité de logarithmes differens. Mais il faut ici remarquer une grande difference, qui eſt, que tous les arcs, qui répondent au même ſinus & coſinus ſont réels, au lieu que tous les logarithmes du même nombre ſont imaginaires à la reſerve d'un ſeul, lorsque le nombre donné eſt poſitif; car tous les logarithmes des nombres, tant negatifs qu'imaginaires, ſont ſans aucune exception imaginaires. Or comme à un arc donné ne convient qu'un ſeul ſinus & coſinus, ainſi à un logarithme propoſé ne répond qu'un ſeul nombre; de ſorte que c'eſt un probleme, qui n'admet qu'une ſeule ſolution, lorsqu'on demande le nombre, qui convient à un logarithme propoſé.

Probleme IV.

Un logarithme quelconque étant propoſé, trouver le nombre qui lui répond.

SOLUTION.

Poſons premiérement que le logarithme propoſé ſoit une quantité réelle $= f$, & on ſait que poſant le nombre $= e$, dont le logarithme réel $= 1$, le nombre qui répond au logarithme f ſera $= e^f$.

En ſecond lieu, ſoit le logarithme propoſé $= g\sqrt{-1}$ ou ſimplement imaginaire, & ſoit x le nombre qui lui répond. Puisque g eſt un nombre réel, qu'on le compare avec π, & qu'il ſoit $g = m\pi$, & il eſt clair, ſi m eſt un nombre entier ou pair ou impair, le nombre x ſera ou $+1$ ou -1. Mais pour tout autre cas quelconque le nombre x ſera imaginaire, & pour le trouver on n'a qu'à prendre un arc de cercle

$= g$, le rayon étant $= 1$ & ayant cherché ſon ſinus & coſinus, le nombre cherché ſera $x = \text{cof}\, g + \sqrt{-1}.\ \text{ſin}\, g$.

En troiſieme lieu, ſoit le logarithme propoſé une quantité imaginaire quelconque $= f + g\sqrt{-1}$, puiſqu'on ſait que toute quantité imaginaire ſe peut réduire à cette forme $f + g\sqrt{-1}$; en ſorte que f & g ſoient des nombres réels. Cela poſé, il eſt clair que le nombre cherché x ſera le produit de deux nombres, dont l'un aura pour logarithme f & l'autre $g\sqrt{-1}$. Par conſéquent le nombre qui répond au logarithme $f + g\sqrt{-1}$ ſera $= e^f\ (\text{cof}\, g + \sqrt{-1}.\ \text{ſin}\, g)$. C. Q. F. T.

On voit donc que le nombre, qui répond au logarithme propoſé $f + g\sqrt{-1}$ ſera réel, lorſque $\text{ſin}\, g = 0$, c'eſt à dire, lorſque $g = m\pi$, le coëfficient m étant un nombre entier quelconque, ou affirmatif ou negatif. Dans ce cas on voit de plus, que ſi m eſt un nombre pair, à cauſe de $\text{cof}\, g = +1$, le nombre cherché ſera affirmatif, mais ſi m eſt un nombre impair, qu'a cauſe de $\text{cof}\, g = -1$, le nombre cherché ſera negatif $= -e^f$. Dans tous les autres cas, où m, c'eſt à dire $\frac{g}{\pi}$ ſera un nombre rompu, ou méme irrationel, le nombre qui répond à ce logarithme $f + g\sqrt{-1}$ ſera infailliblement imaginaire.

Par le moyen de cette régle on pourra auſſi ſe ſervir des logarithmes dans le calcul des nombres imaginaires. Pour en donner un exemple, qu'on cherche la valeur de cette expreſſion $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^4 \left(\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 \sqrt{-1} = A$. Pour cet effet on n'a qu'à prendre un logarithme quelconque de chaque facteur, & en faire les opérations conformément aux régles généralement reçues en ſorte:

$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}$. Donc $4l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{8}{3}\pi\sqrt{-1}$

$l\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}$; .... $3l\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\pi\sqrt{-1}$

$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}$; .... $2l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{8}{3}\pi\sqrt{-1}$

& enfin $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$

Donc la ſomme ou $lA = \frac{79}{12}\pi\sqrt{-1}$

Par conſequent le produit cherché ſera

$A = \text{cof}\frac{79}{12}\pi + \sqrt{-1}.\ \text{ſin}\frac{79}{12}\pi$ ou bien

$A = \text{cof}\frac{7}{12}\pi + \sqrt{-1}.\ \text{ſin}\frac{7}{12}\pi$

Je remarque encore que le logarithme propoſé étant $= f + g\sqrt{-1}$ le nombre répondant ſelon la régle commune ſe trouve $= e^{f+g\sqrt{-1}}$ Or cette expreſſion eſt tout à fait équivalente à celle que nous venons de trouver, Car on ſait d'ailleurs que $e^{g\sqrt{-1}} = \text{cof}\,g + \sqrt{-1}.\ \text{ſin}\,g$ & partant $e^{f+g\sqrt{-1}} = e^f.\ e^{g\sqrt{-1}} = e^f\ (\text{cof}\,g + \sqrt{-1}.\ \text{ſin}\,g)$: mais cette derniere expreſſion eſt plus commode que la premiére, ou les imaginaires entrent dans l'expoſant.